

THE WATER OF THE LIBERTY

Durée : 1 heure Coefficient : 1

ÉPREUVE FACULTATIVE

Le (la) candidat (e) doit traiter tous les exercices.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

L'usage des calculatrices est autorisé.

Le formulaire officiel de mathématique est joint au sujet.



(11 points)

On pose $f(x) = x \times \ln(1+x)$, x étant une variable réelle de $]-1, +\infty[$.

- 1) Calcul d'un développement limité.
 - a) En utilisant le développement limité d'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction x → ln(1+x), montrer qu'on peut écrire :

$$f(x) = x^2 - \frac{1}{2}x^3 + x^3\varepsilon(x)$$
 avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

- b) En déduire le signe de f(x) au voisinage de 0.
- Sans utiliser les développements limités, montrer que f(x) = x x ln (1 + x) est positif ou nul pour tout x de]-1,+∞[.
- 3) On considère l'équation différentielle (E): $x y' y = \frac{x^2}{1+x}$,

x appartenant à l'intervalle $]0,+\infty[$ et y étant une fonction inconnue de la variable x.

- a) Vérifier que f est solution de (E).
- b) Résoudre l'équation (E).





(9 points)

Dans tout cet exercice, les résultats des calculs de probabilités seront donnés sous leur forme arrondie à 10⁻³ près.

La durée de vie d'une diode (en heures) est une variable aléatoire X qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,00008$.

- 1) Quel est le temps moyen de bon fonctionnement de cette diode ?
- 2) Quelle est la probabilité que la diode fonctionne encore au bout de 10000 heures ?
- 3) Quelle est la probabilité que la première panne intervienne entre la 10000^{ième} et la 15000^{ième} heure?
- 4) Quel devrait être, arrondi à l'heure près, le temps moyen de bon fonctionnement de la diode pour qu'elle ait une chance sur deux de fonctionner encore au bout de 20000 heures?